УДК 62

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НОРМАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Кочеткова Т.П., Никитин М.А., Кошелева В.А.

БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Устинова

В современной аэрокосмической технике остается весьма актуальной задача расчета и создания цилиндрических конструкций с минимальными весовыми и геометрическими характеристиками, которое требует в том числе и оценки технологической особенности их обработки. Особо важная и сложная задача возникает в процессе проектирования и изготовления тонкостенных изделий в виде круговых цилиндрических оболочек с упругим заполнителем.

В статье предлагается я аналитическое определение минимальной величины разрушающей нагрузки оболочки такого вида методом оценки напряжений поверхностного слоя материала, покоящимся на поверхности другого материла; при этом используется гипотеза Винклера о пропорциональности величины радиально-упругой оболочки при реактивном давления основания. Получены конечные математические выражения для изгибающих моментов и перерезывающей силы, точность которых является вполне достаточной для практических целей.

Ключевые слова: Цилиндрическая оболочка, технологические обработки, разрушающие нагрузки, поверхностный слой, радиальный прогиб, реактивное давление основания, гипотеза Винклера.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF CYLINDRICAL SHELL UNDER EXPOSURE TO NORMAL LOADS

Kochetkova T.P., Nikitin M.A., Koheleva V.A.

In modern aerospace engineering remains very urgent problem of calculation and creation of cylindrical structures with minimal weight and geometric characteristics, which requires including the assessment of technological features of their processing. A particularly important and complex task arises in the design and manufacture of thin-walled products in the form of circular cylindrical shells with an elastic filler.

In the article I analytical determination of the minimum value of the breaking load of the shell of such a method of stress evaluation of the surface layer of material lying on the surface of another material; this uses the hypothesis of Winkler about the proportionality of the magnitude of the radially-elastic shell under the reactive pressure of the Foundation. The final mathematical expressions for bending moments and shearing force, the accuracy of which is sufficient for practical purposes, are obtained.

Keywords: The cylindrical shell processing, breaking load, surface layer, radial deflection, the reactive pressure of the Foundation, the hypothesis of Winkler.

В современной аэрокосмической технике большое научное и практическое значение имеет создание конструкций с минимальными весовыми и геометрическими характеристиками.

Особо важная и сложная задача возникает в процессе проектирования и изготовления тонкостенных изделий в виде круговых цилиндрических оболочек с упругим заполнителем.

Проблема расчёта цилиндрических оболочек на радиальные и сосредоточенные воздействия возникает и при решении ряда технологических задач, связанных с механическим удалением высокопрочного поверхностного слоя с цилиндрических и листовых заготовок [1].

С целью обеспечения надёжного гарантированного удаления дефектного слоя с заготовки к инструменту-индентору необходимо прикладывать строго регламентированные контактные нагрузки.

Для аналитического определения минимальной величины разрушающей нагрузки необходимо рассмотреть напряжённо-дереформированное состояние дефектного поверхностного слоя в контактной зоне.

В случае однородного изотропного материала задача по определению напряжений и перемещений материала в зоне действия индентора решается средствами теории упругости.

Значительно более сложной в теоретическом плане проблемой является нахождение напряжений и перемещении в поверхностном слое из одного материала, покоящемся на поверхности другого материала.

При этом полагается, что поверхностный слой имеет сравнительно малую толщину и физико-механические свойства отличные от свойств основного материала.

В качестве модели упругого основания на первом этапе исследований примем гипотезу Винклера о пропорциональности реактивного давления основания от величины радиального прогиба оболочки.

Принимаемая модель основания представляет собой систему расположенных бесконечно близко друг от друга отдельных пружин одинаковой жёсткости. В связи с этим прогиб основания имеет место только там, где приложена нагрузка. Принятые допущения значительно упрощают исходные дифференциальные уравнения и последующие математические выкладки. В дальнейшем будет рассмотрена задача и в более корректной постановке, когда за модель основан принимается гипотеза о существовании однородного упругого полупространства.

Базируясь на допущениях прикладной теории тонких упругих оболочек с упругим заполнителем [2], можно записать:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2\,\partial^4 u}{R^2\,\partial x^2\,\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4 u}{R^4\,\partial\varphi^4}=\frac{v}{R}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 w}{R^3\,\partial x\,\partial\varphi^2};$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4}+\frac{2\,\partial^4 \vartheta}{R^2 dx^2 d\varphi^2}+\frac{\partial^4 \vartheta}{R^4 d\varphi^4}=\frac{\partial^3 w}{R^4\,\partial\varphi^3}+(2+v)\cdot\frac{\partial^3 w}{R^3\,\partial x d\varphi^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{R^2}\cdot\frac{\partial^4 w}{dx^2 d\varphi^2}+\frac{\partial^4 \vartheta}{R^4 d\varphi^4}=\frac{q}{D}-\frac{kw}{D}-\frac{Eh}{D(1-v^3)R}\cdot\left(\frac{w}{R}-v\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{d\vartheta}{R\,\partial\varphi}\right),$$

где u, ϑ, w - соответственно осевое, тангенциальное и смещения срединного слоя оболочки;

x - осевая координата;

φ - окружная координата;

R, h— радиус и толщина оболочки;

v — коэффициент Пуассона;

q— интенсивность радиальной нагрузки;

к— модуль упругого основания;

D— цилиндрическая жёсткость;

Е - модуль нормальной упругости.

Приведённая система уравнений, подробно исследованная Доннелем [2], эквивалентна одному разрешающему дифференциальному уравнению в частных производных. Нами получено точное аналитическое решение этого уравнения в замкнутом виде. Решение отличается сравнительной громоздкостью математических выкладок и здесь не рассматривается.

Значительно проще и те же результаты решения поставленной задачи можно получить при введении допущений технической теории тонких оболочек [2-4]. Полагая, что нормальные напряжения в срединной поверхности оболочки малы по сравнению с изгибными напряжениями, третьим слагаемым в правой части третьего уравнения системы можно пренебречь, в результате будем иметь одно биквадратное уравнение в частных производных относительно радиального прогиба.

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2\,\partial^4 w}{R^2\,\partial x^2\,\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4 u}{R^4\,\partial\varphi^4}+\frac{k}{D}\cdot w=\frac{q}{D}. \qquad (2)$$

Обратимся к решению этого уравнения для частного случая загружения цилиндрической оболочки (поверхностного слоя) радиальной силой, равномерно распределённой по дуге кругового сечения.

Используя метод М Леви, радиальный прогиб оболочки представим в виде одинарного тригонометрического ряда:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{u_n} \cos(\mathrm{n}\varphi), \qquad (3),$$

где u_n— функция, зависящая только от координаты x.

n — индекс суммирования.

Подставив выражение (3) в уравнение (2) для данного случая загружения получим

$$u_n^4 = 2r^2 u_n^2 + S u_n^4 = 0, \qquad (4)$$

$$r = \frac{n}{R}$$

где

$$\mathrm{S} = \sqrt[4]{\mathrm{r}^4 + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{D}}}$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\omega = \mathrm{C_1 e^{-ax}} \sin(\beta \mathrm{x}) + \mathrm{C_2 e^{-ax}} \cos(\beta \mathrm{x}) + \mathrm{C_3 e^{ax}} \sin(\beta \mathrm{x}) + \mathrm{C_4 e^{ax}} \cos(\beta \mathrm{x}),$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{S}^2 + \mathrm{r}^2}{2}}; \beta = \sqrt{\frac{\mathrm{S}^2 - \mathrm{r}}{2}}. \qquad (5)$$

С увеличением координаты x прогиб оболочки уменьшается и в пределе стремится к нулю. Поэтому произвольные постоянные $C_3=C_4=0$.

Из условия симметрии изогнутой поверхности оболочки можно

записать:

$$\left|\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}}\right|_{\mathrm{x}=0} = 0.$$

Из этого граничного условия находим $C_1 = \frac{\alpha}{\beta} C_2$.

Коэффициент C_1, нетрудно найти из нижеследующего равенства перерезывающей силы и внешней нагрузки:

$$|Q_x|_{x=0} = \frac{q}{2}. \qquad (6)$$

Интенсивность нагрузки представим в виде одинарного тригонометрического ряда:

$$w = \frac{2P}{\pi R\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \cos(n\varphi),$$

Подставив выражение (6) в общий интеграл уравнения (5), найдём

$$C_1 = \frac{P}{2\pi RD\beta(\alpha^2 + \beta^2)\theta} \cdot \frac{1}{n\sin}\left(\frac{n\theta}{2}\right) \qquad (7)$$

С учётом найденных постоянных выражение (3) примет следующий вид

$$w(x, \varphi) = \frac{P}{2\pi RD\theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha}\cos(\beta x)}{\alpha}\right) \cdot e^{-\alpha x}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \cos(n\varphi) \quad (8)$$

Соответственно для радиальной сосредоточенной нагрузки будем иметь

$$w(x, \varphi) = \frac{P}{4\pi RD} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \cos(\beta x)\, e^{-\alpha x}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \cos(n\varphi) \quad (9)$$

Распределение прогибов в окружном направлении найдём, если в выражение (9) подставим x=0:

$$w(x,\varphi) = \frac{P}{4\pi RD} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \qquad (10)$$

Числовой ряд (10) сходится на всей числовой оси. Конечная его сумма может быть вычислена путём замены суммы на интеграл вида

$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(\alpha^2+x^x)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma}$$

В итоге получим

$$w(0,\varphi) = \frac{P}{8\sqrt{kD}}\left(1+2\sqrt[4]{\frac{k}{D}}R\varphi\right)e^{-\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{k/_D}R\varphi}. \quad (11)$$

Максимального значения прогиб (11) достигает непосредственно под сосредоточенной силой φ= о:

$$w(0,\varphi) = \frac{P}{8\sqrt{kD}} = \frac{Pl^2}{8D}. \quad (12)$$

Полученный результат совпадает с известным аналитическим решением С.П.Тимошенко [2], стр.299. Для установления справедливости выведенной формулы были выполнены конкретные числовые расчёты (см. таблицу).

Данные таблицы убедительно свидетельствуют о правомерности использования формулы (11) для исследования деформированного состояния оболочки на винклеровском основании.

Посредством двукратного дифференцирования выражения (9) находим формулы для изгибающих моментов

$$M_1(0,\varphi) = \frac{P}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\cos(\beta x)-\sin(\beta x)\right)\cdot e^{-\alpha x}\cos(n\varphi);$$

$$M_2(0,\varphi) = \frac{P}{4\pi R^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\sin(\beta x)+\frac{\beta}{\alpha}\cos(\beta x)\right)\cdot e^{-\alpha x}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\cos(n\varphi), \quad (13)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4+\mu^4}+\mu^2}{2}}$; $\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4+\mu^4}+\mu^2}{2}}$.

В таблице 1 представлены расчетные значения прогибов оболочки.

Таблица 1. Расчетные значения прогибов оболочки на винклеровском основании под действием нормальной сосредоточенной силы

$\frac{x}{l}$	$w(0,\xi/w(0,0)$		$\frac{x}{l}$	$w(0,\xi/w(0,0)$	
	По данным работы [5]	По формуле (11)		По данным работы [5]	По формуле (11)
0	1,0000	1,0000	1,2	0,5426	0,4942
0,04	0,9978	0,9985	1,3	0,5008	0,4516

0,06	0,9955	0,9966	1,4	0,4605	0,4115
0,10	0,9891	0,9909	1,5	0,4219	0,3742
0,14	0,9808	0,9828	1,6	0,3852	0,3397
0,20	0,9653	0,9667	2,0	0,2577	0,2263
0,30	0,9334	0,9318	2,2	0,2052	0,1830
0,40	0,8961	0,8893	2,4	0,1608	0,1476
0,50	0,8551	0,8418	3,0	0,0651	0,0755
0,60	0,8116	0,7912	4,0	-0,0028	0,0233
0,70	0,7667	0,7395	5,0	-0,0142	0,0065
0,80	0,7212	0,6876	6,0	-0,0092	0,0019
0,90	0,6755	0,6365	7,0	-	0,0006
1,00	0,6302	0,5869			

Для точек расположенных на образующей x = 0 :

$$M_1(0,\varphi) = \frac{P}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\varphi)}{\alpha};$$

$$M_2(0,\varphi) = \frac{P}{4\pi R^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cos(n\varphi)}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}. \qquad (14)$$

В точке приложения сосредоточенной нагрузки ряды становятся расходящимися.

Рассмотрим более подробно выражение для изгибающего момента $M_1(0,\varphi)$. Данный ряд обладает сходимостью на всей числовой оси, в том числе и в точке с координатой φ=0. Заменив сумму (14) на интеграл вида

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}, \text{окончательно получим:}$$

$$M_1(0,\varphi) = \frac{P}{4}\exp\left(-\sqrt{\sqrt[4]{k/_D}}\,R\varphi\right). \qquad (15)$$

Конечную формулу для изгибающего момента $M_2(0,\varphi)$ получим с помощью интеграла вида

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos(mx)}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}(1-m)e^{-\alpha}.$$

$$M_2(0,\varphi) = \frac{P}{4}\left(1-\sqrt{2}\sqrt[4]{k/_D}\,R\varphi\right)\exp\left(-\sqrt{2}\sqrt[4]{k/_D}\,R\varphi\right). \quad (16)$$

Результаты вычислений по формулам (15) и (16) хорошо согласуются с данными работы [5].

Используя метод суперпозиции, решения, полученные выше для сосредоточенных нормальных нагрузок, могут быть распространены и на другие более сложные виды нагружений (по отрезку прямой, площади круга, прямоугольника и т.п.).

Выводы

1. На основе технической теории изгиба тонких оболочек не винклеровском основании нормальной сосредоточенной силой получены конечные выражения для изгибающих моментов и перерезывающей силы, удовлетворительно согласующимися с известными численными решениями.

2. Анализ результатов вычислений подтверждает, что точность выведенных приближённых формул вполне достаточна для практических целей.

3. Полученные соотношения (15) и (16) могут быть использованы и для тех случаев, когда основание обладает свойствами однородного упругого изотропного полупространства.

Список литературы

1. Сойкин Б.М. Анализ напряжённо-деформированного состояния листовой заготовки, находящейся под воздействием инструмента-индентора. /Межвуз. сб. "Проблемы машиноведения и машиностроения". Вып 30. - СПб.; СЗТУ, 2003. - С. 9-13.

2. Тимошенко СП., Войновский Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.

3. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. - М.: Наука, 1982. - 568 с.

4. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. - М.: Мир, 1982. -544 с.

5. Коренев Б.Г., Черниговская Е.И. Расчёт плит на упругом основании. - М.: Госстройиздат , 1962,- 356с.